



1. Puissance

- Définition d'une puissance avec exposant positif :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

- Définition d'une puissance avec exposant négatif :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- $a^0 = 1$ sauf pour $a = 0$, dans ce cas $0^n = 0$.

- $a^{-1} = \frac{1}{a}$

- Cas des puissances de dix : $10^n = \underbrace{1000\dots0}_{n \text{ zéros}}$ et $10^{-n} = \underbrace{0,00\dots01}_{n \text{ zéros}}$

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$; $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$; $(a^n)^m = a^{n \times m}$

- L'écriture scientifique d'un nombre est de la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre décimal qui ne doit avoir qu'un seul chiffre avant la virgule (mais pas zéro).

Exercice 1.1 : Ecrire sous la forme a^n avec a un nombre entier

$$A = 3^4 \times 3^{12} \quad B = (4^5)^{-2} \quad C = \frac{17^5}{17^{12}} \quad D = 3^{120} \times 3^{-321} \quad E = \frac{5^{71} \times 5^{-32}}{5^{-31}}$$

Exercice 1.2 : Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$$\begin{array}{llll} A = 14,3 \times 10^8 & B = 0,03 \times 10^{-6} & C = 2\,880\,000\,000 & D = 1,49 \times 10^8 \\ E = 0,000\,502 & F = 72 \text{ millièmes} & G = 47 \times 10^{-4} & H = 0,027 \times 10^{10} \end{array}$$

2. Fractions

somme	produit	simplification	quotient
$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$	$\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b}$	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

Exercice 2.1 : Calculer sous forme de fraction irréductible :

$$A = \frac{1}{9} - \frac{5}{9} \times \frac{6}{7} \quad B = \frac{-5}{7} - \frac{8}{-21} \quad C = \frac{2 + \frac{3}{7}}{\frac{5}{3} - 1} \quad D = \frac{1}{2} \left[\frac{5}{3} - 4 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6} \right) \right]$$

3. Les nombres

- Un **nombre entier** supérieur ou égal à 2 est soit premier, soit décomposable en produit de facteurs premiers.
- Un **nombre décimal** est un nombre qui peut s'exprimer sous la forme $a \times 10^n$, avec a et n des nombres entiers relatifs.
- Un **nombre rationnel** est un nombre qui peut s'exprimer sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers.

Exercice 3.1 : Ecrire la liste de tous les diviseurs de 32 ; 67 ; 81 et 144.

Exercice 3.2 :

- a. Décomposer 429 ; 130 ; 286 et 165 en produit de facteurs premiers.
- b. Ecrire les résultats des calculs suivants sous forme d'une fraction irréductible :

$$\frac{429}{130} + \frac{286}{165} \qquad \frac{429}{286} - \frac{130}{165}$$

Exercice 3.3 : Justifier que $\frac{33}{1500}$ est un nombre décimal puis en donner la notation scientifique.

Exercice 3.4 : Orlande est boulangère. Elle utilise la fin de son stock de bonbons pour réaliser des sachets de composition identique. Elle dispose de 63 fraises, 273 bananes, 105 oursons et 231 crocodiles.

- a. Combien de sachets peut-elle réaliser ? Donner toutes les possibilités.
- b. Elle décide de réaliser le maximum de sachets. Combien en fera-t-elle et quelle sera la composition de chaque sachet ?



Calcul littéral

1. Développer et Factoriser

- Développer un produit signifie le transformer en une somme.
- Factoriser une somme signifie la transformer en un produit.
- Pour développer, on distribue la multiplication sur l'addition et la soustraction :
 - Développement simple : $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$
 - Développement double : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
- Pour factoriser, deux méthodes :
 - on repère des facteurs communs (en s'aidant des tables de multiplication notamment ou en remarquant des blocs parenthèses identiques).
 - On utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Exercice 1.1 : Développer et réduire les expressions suivantes.

$$A(x) = (2x - 3)(5x - 4)$$

$$B(x) = 2x(5x - 3) - 7$$

$$C(x) = 3x - (x - 1) - (x + 7)(x + 3)$$

$$D(x) = (x + 5)^2$$

$$E(x) = (6 + 7x)(6 - 7x)$$

$$F(x) = (4x - 1)^2$$

Exercice 1.2 : Factoriser les expressions suivantes.

$$A(x) = x^2 + 2x$$

$$B(x) = 7x(x - 4) + (x - 4)^2$$

$$C(x) = 9x^2 - 12x$$

$$D(x) = (x + 1)(2x + 5) - (x + 1)(3x - 4)$$

$$E(x) = 16x^2 - 1$$

$$F(x) = 25 - (2x - 1)^2$$

$$G(x) = (2 - x)(3x + 1) + (3x + 1)$$

Exercice 1.3 : Effectuer sans la calculatrice et astucieusement les calculs suivants (rédiger les étapes intermédiaires) :

$$A = 48 \times 99$$

$$B = 57 \times 101$$

$$C = 1012$$

2. Résoudre une équation

• Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs possibles que l'on peut donner à l'inconnue x pour que l'égalité soit vérifiée.

Équation du premier degré

- Résoudre l'équation $x + 1 = 3x + 5$

$$x + 1 - 3x = 3x + 5 - 3x$$

$$-2x + 1 - 1 = 5 - 1$$

$$\frac{-2x}{-2} = \frac{4}{-2}$$

$$x = -2$$

On regroupe tous les termes en x dans un membre.

L'équation a pour seule solution -2 .

Équation produit nul

a, b, c, d désignent des nombres ($a \neq c$).

- Les solutions d'une équation produit nul :

$$(ax + b)(cx + d) = 0$$

sont les nombres x tels que :

$$ax + b = 0 \text{ ou } cx + d = 0$$

Exercice 2.1 : On considère l'équation (E) : $(x + 3)(2x - 5) = 5x - 15$

- Le nombre -1 est-il solution de (E) ?
- Justifier que 2 est solution de (E).
- Prouver qu'il existe un autre nombre solution de (E).

Exercice 2.2 : Résoudre les équations suivantes.

$$E_1 : 3x - 1 = -13$$

$$E_2 : -2x + 5 = 8$$

$$E_3 : 5x = 0$$

$$E_4 : 4 - x = 7$$

$$E_5 : 11x - 3 = 2x + 9$$

$$E_6 : \frac{x}{7} = \frac{-7}{4}$$

$$E_7 : (-2x - 5)(3x + 2) = 0$$

Exercice 2.3 : Après avoir factorisé le membre de gauche, résoudre les équations suivantes.

- $-6x^2 - 12x = 0$
- $(5x - 25)(x + 4) + (2x + 1)(5x - 25) = 0$
- $(x - 2)^2 - 25 = 0$

Exercice 2.4 : Dans le magasin de sport, si j'achète 3 raquettes de tennis de table, il me reste 3 €. Si j'en achète 5, il me manque 8 €. Quel est le prix d'une raquette ?

Exercice 2.5 : Maïssa joue à un jeu vidéo. Lorsqu'elle tue un monstre avec son épée, elle gagne x points ; lorsqu'elle est blessée par un monstre, elle perd x^2 points. À la fin du niveau, elle a tué 42 monstres, a été blessée 6 fois et son nombre de points est le même qu'au début du niveau.

- Est-il possible que chaque monstre tué fasse gagner 10 points ?
- Expliquer pourquoi x est solution de l'équation $42x - 6x^2 = 0$.
- Factoriser le membre de gauche par $6x$ et déterminer la valeur de x en résolvant l'équation produit.

Pythagore, Thalès, Trigonométrie

1. Egalité de Pythagore

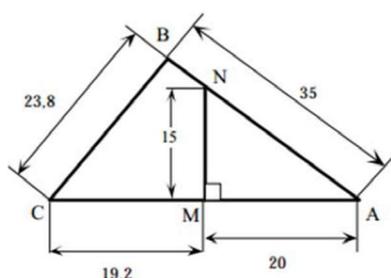
Théorème de Pythagore

Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Réciproque

Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice 1.1 : AMN Est un triangle rectangle en M. Les mesures nécessaires sont sur la figure.



a. Calcule AN. Justifie ton calcul par une propriété.

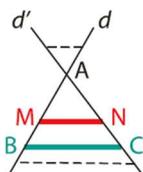
b. Le triangle ABC est-il rectangle ? Prouve-le.

2. Théorème de Thalès et triangles semblables

Théorème de Thalès

d et d' sont deux droites sécantes en A; B et M sont deux points de d , distincts de A; C et N sont deux points de d' , distincts de A.

• Si $(BC) \parallel (MN)$,
alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$



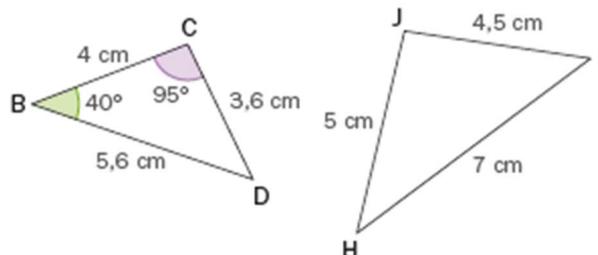
Réciproque

• Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si A, B, M et A, C, N sont dans le même ordre, alors $(MN) \parallel (BC)$.

- Deux triangles **semblables** sont des triangles dont les **angles sont égaux deux à deux**.
- Si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles, alors ces deux triangles sont semblables.
- Réciproquement, si deux triangles sont semblables, alors les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.

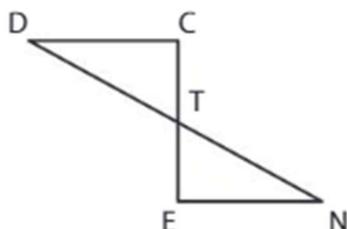
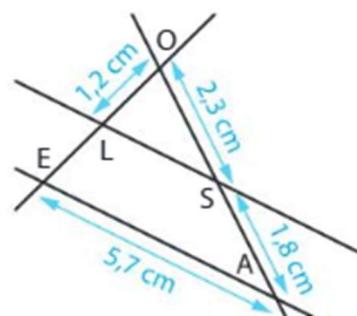
Exercice 2.1 :

On considère les deux triangles ci-contre. Déterminer en justifiant les mesures des angles du triangle HIJ.



Exercice 2.2 :

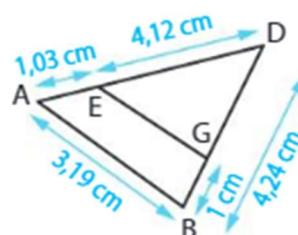
- a. Les droites (LS) et (EA) sont parallèles. Déterminer une valeur approchée au mm près des longueurs LE et LS dans la figure ci-contre.



- b. On considère la figure ci-contre où les droites (DC) et (EN) sont parallèles. On donne les mesures suivantes :
 DT = 4,7 cm ; TN = 5,2 cm ; EN = 4,3 cm ; ET = 2,4 cm.
 Calculer une valeur approchée au mm près des longueurs DC et CT.

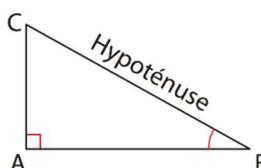
Exercice 2.3 :

Dans la figure ci-contre, les droites (EG) et (AB) sont-elles parallèles ?



3. Rapports trigonométriques

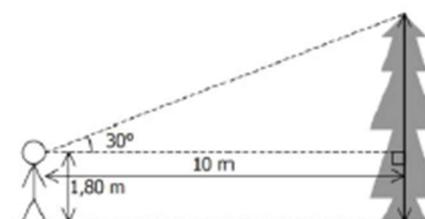
ABC est un triangle rectangle en A.



$$\cos \hat{B} = \frac{\text{côté adjacent à } \hat{B}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BA}{BC}; \quad \sin \hat{B} = \frac{\text{côté opposé à } \hat{B}}{\text{hypoténuse}} = \frac{CA}{CB}; \quad \tan \hat{B} = \frac{\text{côté opposé à } \hat{B}}{\text{côté adjacent à } \hat{B}} = \frac{AC}{AB}$$

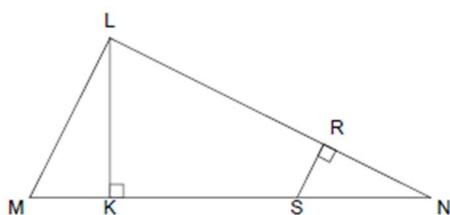
Exercice 3.1 : ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 6 cm et BC = 7 cm.
 Calculer la mesure de l'angle \widehat{ABC} . Arrondir à l'unité.

Exercice 3.2 : Un personnage mesurant 1,80 m se trouve à 10 m du pied d'un arbre. Alors qu'il regarde la cime, son regard fait un angle de 30° avec l'horizontale. Quelle est la hauteur de l'arbre ? Arrondir au dm.



Exercice 3.3 : On considère la figure ci-dessous

On donne : MN = 8 cm ; ML = 4,8 cm ; LN = 6,4 cm.



- Démontrer que le triangle LMN est rectangle.
- Calculer la valeur arrondie au degré de la mesure de l'angle \widehat{LMN} .
- Soit K le pied de la hauteur issue de L. En exprimant de deux façons $\sin (M)$, Montrer que [LK] mesure exactement 3,84 cm.
- Soit S le point de [MN] tel que NS = 2 cm.

La perpendiculaire à (LN) passant par S coupe [LN] en R. Calculer la valeur exacte de RS.



Généralités sur les fonctions.

Fonctions linéaires et affines.

1. Généralités

- Une **fonction** est un processus qui, à chaque valeur du nombre x , associe un unique nombre y , noté $f(x)$, appelé **l'image de x par f** . On écrit $f: x \mapsto y$. On lit « fonction f qui à x associe y »
- On dit que x est un **antécédent** de y par f lorsque $y = f(x)$.
- La **représentation graphique de f** est l'ensemble de tous les points de coordonnées $(x ; f(x))$.

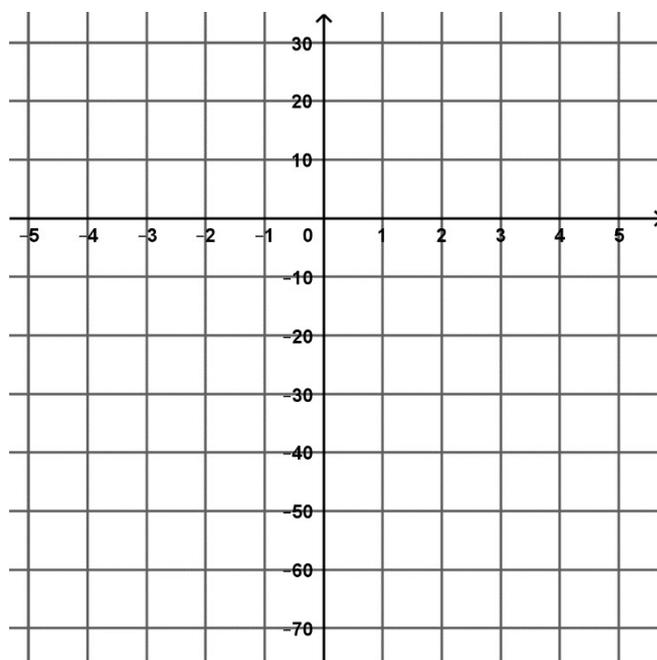
Exercice 1.1 : Soit f la fonction définie sur $[-5 ; 5]$ par : $f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 18x + 1$.

On désire construire la représentation graphique de cette fonction sur l'intervalle $[-5 ; 5]$.

- a. Remplir le tableau suivant en choisissant des valeurs différentes de x de l'intervalle $[-5 ; 5]$ et en calculant leur image par la fonction f .

x							
$f(x)$							

- b. Placer les points de coordonnées $(x ; f(x))$ dans le repère puis tracer la courbe passant par ces points.

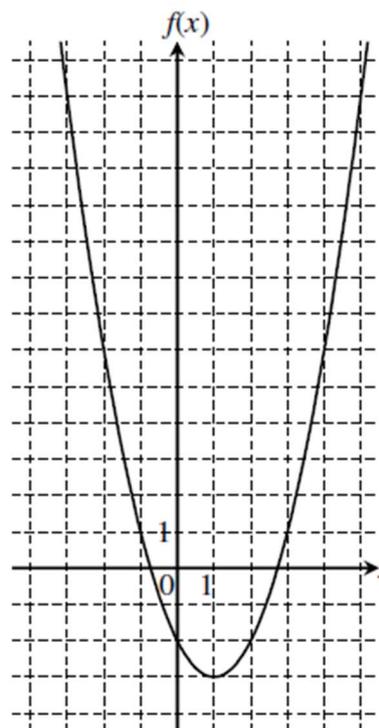


Exercice 1.2 : Un tableau de valeurs d'une fonction g est donné ci-dessous.

x	-2,5	-1	-0,7	0	1,2	2,5	5
$g(x)$	5	3,4	2,5	-1	-2,5	-1	1,2

- Quelle est l'image de -1 par la fonction g ?
 - Donner un antécédent de $-2,5$ par la fonction g ?
 - Donner un antécédent de -1 par la fonction g ?
- Quelles affirmations sont vraies ?
 - $-2,5$ est l'image de $1,2$ par la fonction g .
 - $-2,5$ est l'image de 5 par la fonction g .
 - $2,5$ a pour antécédent -1 par la fonction g .
 - $-0,7$ a pour image $2,5$ par la fonction g .

Exercice 1.3 : Le graphique ci-contre représente la fonction f définie par $f(x) = (x - 1)^2 - 3$.



Résolution par lecture graphique

1. Quelles sont les images des nombres 1 et -2 par f ?
2. Quels sont les antécédents par f du nombre -2 ?
3. Le nombre -3 admet-il des antécédents ? (Expliquer).

Résolution par le calcul

1. Calculer l'image par f de 0 et de 2. Quel résultat trouve-t-on ?
2. **a)** Montrer que rechercher les antécédents par f de 13 revient à résoudre l'équation $(x - 1)^2 - 16 = 0$.
- b)** Montrer que, pour tout nombre x , on a : $(x - 1)^2 - 16 = (x - 5)(x + 3)$.
- c)** En déduire les antécédents de 13 par f .

2. Fonctions linéaires et affines

• Une **fonction affine** est une fonction de la forme $f(x) = ax + b$.
Par exemple :

$f : x \mapsto 2x - 1$ est une fonction affine
car elle est de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a = 2$ et $b = -1$.

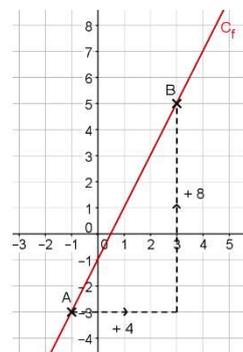
• La représentation graphique d'une fonction affine est une **droite**. Le nombre a est appelé le **coefficient directeur (ou pente)** de la droite.

Le nombre b est appelé l'**ordonnée à l'origine** de la droite.
Par exemple :

Sur la représentation graphique ci-contre, on choisit deux points A et B sur la courbe. En se déplaçant de A vers B, on se dirige de $+4$ à l'horizontal et de $+8$ à la verticale.

La pente se calcule ainsi : $\frac{\text{Déplacement vertical}}{\text{Déplacement horizontal}} = \frac{+8}{+4} = 2$

De plus l'ordonnée à l'origine se trouve à l'intersection de C_f et de l'axe des ordonnées : ici -1 .



On résume : $a = 2$ et $b = -1$.

Donc cette représentation graphique est celle de la fonction $f(x) = 2x - 1$.

• Une fonction **linéaire** est de la forme $f(x) = ax$.

Par exemple :

$f : x \mapsto \frac{-1}{3}x$ est une fonction linéaire de la forme $f(x) = ax$ avec $a = \frac{-1}{3}$

• La représentation graphique d'une fonction linéaire est une **droite qui passe par l'origine du repère**.

Exercice 2.1 : Parmi ces fonctions, détermine : **a)** Celles qui sont affines ; **b)** Celles qui sont linéaires ; **c)** Celles qui sont constantes ; **d)** Celles qui ne sont pas affines.

$$f : x \mapsto 4x - 3 \quad g : x \mapsto 5 - 2x \quad h : x \mapsto 3x^2 + 5$$

$$i : x \mapsto 4,5x \quad j : x \mapsto -4 \quad k : x \mapsto \frac{1}{x}$$

Exercice 2.2 : Représenter les fonctions suivantes en expliquant la démarche utilisée.

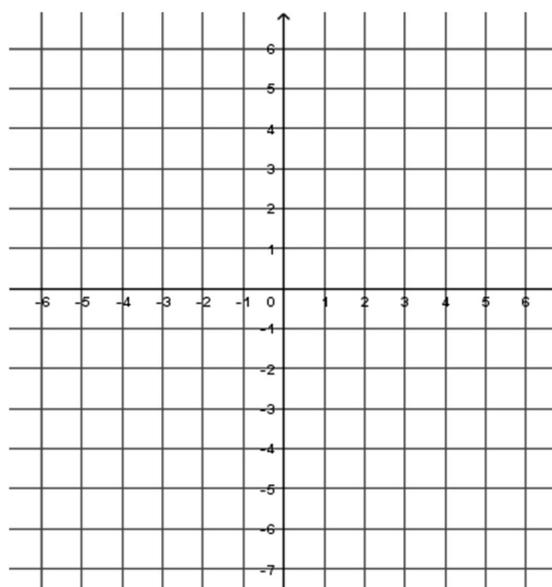
$$f(x) = -3x$$

$$g(x) = -2$$

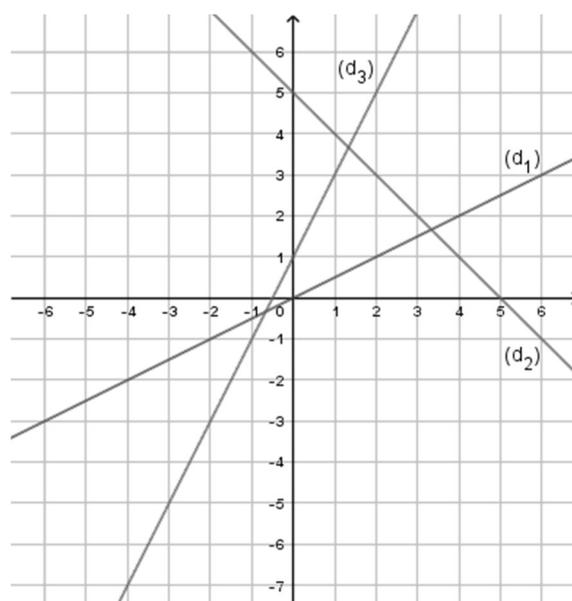
$$h(x) = \frac{1}{2}x + 3$$

$$i(x) = 2x - 5$$

$$j(x) = \frac{-5}{3}x$$



Exercice 2.3 : Détermine graphiquement les fonctions représentées par les droites (d_1) , (d_2) et (d_3) ci-dessous. Expliquer.



Exercice 2.4 : Un vendeur de scooter propose à ses clients deux offres de paiement :

- Offre 1 : remise de 3 % sur le prix du catalogue pour un paiement complet à la commande.
- Offre 2 : paiement de 600 € à la commande, puis le reste du prix augmenté de 20 % en 24 fois.

1. Idriss veut s'acheter un scooter qui vaut 3 000 €. Combien le paiera-t-il s'il choisit l'offre 1 ? l'offre 2 ?
 2. Soit x le prix catalogue en euros d'un scooter. On note $f(x)$ son prix réel en euros avec l'offre 1 et $g(x)$ son prix réel en euros avec l'offre 2.

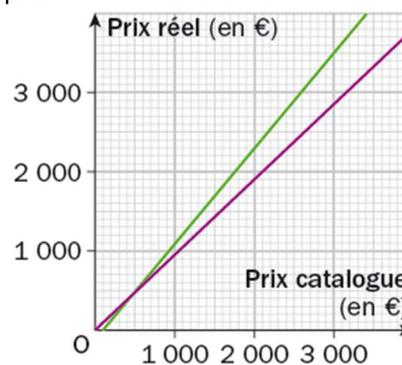
a. Exprimer $f(x)$ en fonction de x .

b. Montrer que $g(x) = 1,2x - 120$.

3. a. Identifier sur le graphique ci-contre les représentations graphiques des fonctions f et g .

b. Le prix catalogue d'un scooter est 2 000 €. Déterminer graphiquement l'écart approximatif entre les prix réels des offres 1 et 2.

c. Retrouver ce résultat par un calcul.





Pourcentages. Statistiques et Probabilités

1. Pourcentages

- Calculer un pourcentage p d'une valeur c'est multiplier cette valeur par $\frac{p}{100}$
- Une augmentation de $p\%$ se traduit par une multiplication par $(1 + \frac{p}{100})$
- Une diminution de $p\%$ se traduit par une multiplication par $(1 - \frac{p}{100})$

Exercice 1.1 : Dans un collège, il y a 160 élèves de troisième. Le taux de réussite au brevet des collèges est de 93,75%. Combien d'élèves de troisième ont été diplômés ?

Dans ce même collège, seulement 85% des élèves de troisième ont été admis en seconde. Combien d'élèves de troisième redoublent ?

A la rentrée suivante, l'effectif des troisièmes augmentent de 5%. Combien y a-t-il d'élèves de troisième à la rentrée ?

Exercice 1.2 : Compléter les tableaux suivants

Pourcentage d'évolution	Coefficient multiplicateur
+5 %	
-15 %	
+45 %	
-12 %	
	1,12
	0,84
-51 %	
	1,84
+1,2 %	
-0,5 %	

Pourcentage d'évolution	Coefficient multiplicateur
+21 %	
-24 %	
	0,45
	0,74
	1,08
	1,84
-0,1 %	
+2,12 %	
	0,69
	1,102

Exercice 1.3 : Lors de la solidification d'un liquide, son volume augmente. Ainsi, un volume d'eau de 10,0 L à l'état liquide devient 10,8 L à l'état solide (glace). Ce volume de glace est proportionnel au volume d'eau liquide.

- Quel volume de glace se forme-t-il en congelant 3 litres d'eau à l'état liquide ?
- On note x un volume d'eau à l'état liquide. Exprimer, en fonction de x , le volume de glace formée après solidification.
- En déduire le pourcentage d'augmentation du volume.
- Quel volume d'eau serait produit si les $2,95 \times 10^7$ km³ de glace de l'Antarctique fondaient intégralement ?

2. Statistiques

La **fréquence** d'une valeur est le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total.

L'**étendue** d'une série statistique est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de cette série.

La **moyenne pondérée** se calcule en additionnant les produits de chaque valeur par son effectif et en divisant cette somme par l'effectif total.

La **médiane** d'une série statistique ordonnée partage cette série en deux parties. Elle est la valeur centrale si l'effectif est impair et la demi-somme des valeurs centrales si l'effectif est pair.

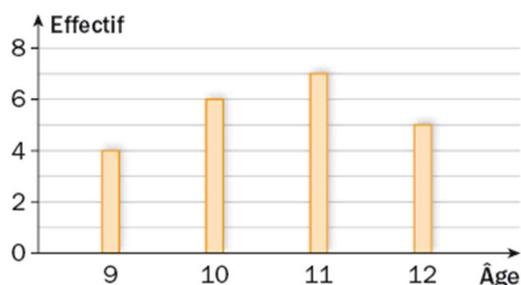
Exercice 2.1 : Déterminer la médiane et l'étendue ces séries suivantes.

a) 14 ; 26 ; 11 ; 33 ; 41 ; 13

b) 37,2 ; 39,4 ; 38 ; 38,2 ; 39 ; 38,6

Exercice 2.2 : Lors d'une opération « Nettoyons la nature », on a relevé l'âge des enfants participants.

- Combien d'enfants cette opération a-t-elle réunis ?
- Calculer l'étendue des âges de ces enfants.
- Calculer l'âge moyen et l'âge médian de ces enfants.



Exercice 2.3 : Voici le relevé des longueurs des gousses de vanille d'un cultivateur.

Longueur (en cm)	12	15	17	22	23
Effectif	600	800	1800	1200	600

- Quel est l'effectif total de cette production ?
- Le cultivateur peut seulement les conditionner dans des tubes de 20 cm de long. Quel pourcentage de cette production a-t-il pu conditionner sans plier les gousses ?
La chambre d'agriculture décerne un label de qualité aux agriculteurs si :
 - la longueur moyenne des gousses est supérieure ou égale à 16,5 cm ;
 - la médiane de leur production est supérieure à 17,5 cm.
- Ce cultivateur pourra-t-il recevoir ce label de qualité ?

3. Probabilités

- Une **expérience** est dite **aléatoire** lorsqu'on ne peut pas en prévoir avec certitude le résultat.
- Une **issue** est le résultat d'une expérience aléatoire.
- Un ensemble d'issues est appelé **événement**.
- L'**événement contraire** d'un événement A est noté \bar{A} . C'est l'événement qui se réalise lorsque A ne se réalise pas.
- Des **événements** sont **incompatibles** s'ils n'ont aucune issue en commun.
- Si A est un événement, alors $p(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas total}}$
- Une probabilité est comprise entre 0 et 1.
- La somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1.

Exercice 3.1 : Pierre participe à un jeu. Trois verres retournés sont disposés sur une table. Une pièce est cachée sous l'un de ces verres. Pierre choisit un des verres et le soulève.

1. Quelle est la probabilité que Pierre trouve la pièce ?
2. On modifie la règle du jeu : il y a désormais cinq verres et deux pièces, les deux pièces sont cachées sous deux verres distincts. Pierre a-t-il plus de chance de trouver une pièce ?

Exercice 3.2 : Une expérience aléatoire admet exactement quatre issues notées A, B C et D. Sachant que $p(A) = \frac{1}{5}$, $p(B) = \frac{2}{15}$ et $p(D) = \frac{1}{3}$, calculer $p(C)$.

Exercice 3.3 : Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher. Une boule porte le nombre 1, deux boules portent le nombre 2, une boule porte le nombre 3.

On tire au hasard successivement et sans remise, deux boules et on additionne les nombres qu'elles portent.

- 1) Faire un arbre de la situation.
- 2) Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 4 ?

Exercice 3.4 : Dans un laboratoire, on élève des souris dont voici des caractéristiques.

1. Compléter le tableau.

Souris	Mâle	Femelle	Total
Blanche	30		
Grise		8	
Total	37		120

Dans la suite de l'exercice les résultats seront arrondis au centième.

2. On prend une souris parfaitement au hasard pour une expérience.
 - a) Calculer la probabilité de sélectionner une souris blanche.
 - b) Calculer la probabilité de sélectionner une souris femelle.
 - c) Calculer la probabilité de sélectionner un mâle gris.
3. On prend une souris blanche. Quelle est la probabilité que ce soit une femelle ?

